Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo, 2008

Carnet: ____________________

Nombre: ____________________

Sección: ____________________

MA-1112 —Tercer Parcial, Martes 8-04-2008. (40 %) —

Justifique todas sus respuestas. Examen Tipo B

1. (10 ptos)

a) (5 ptos) Halle la integral

$$\int e^{\sqrt{x}}dx$$

Solucion: Hacemos el cambio de variable $p = \sqrt{x}$, asi, $dp = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ de aqui $2pdp = dx$. Luego,

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int pe^{p}dp$$

Integrando por partes, $u = p$ y $dv = e^{p}dp$; se tiene que $du = dp$ y $v = e^{p}$. Luego,

$$\int pe^{p}dp = pe^{p} - \int e^{p}dp = pe^{p} - e^{p} + C = e^{p}(p-1) + C.$$

Por ultimo,

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C.$$

b) (5 ptos) Demuestre que

$$\int x^{n}\cos(x)dx = x^{n}\operatorname{sen}(x) - n\int x^{n-1}\operatorname{sen}(x)dx.$$

Solucion: Integrando por partes, $u = x^{n}$ y $dv = \cos(x)dx$; se tiene que $du = nx^{n-1}$ y $v = \operatorname{sen}(x)$. Luego,

$$\int x^{n}\cos(x)dx = x^{n}\operatorname{sen}(x) - n\int x^{n-1}\operatorname{sen}(x)dx.$$

2. (10 ptos.) Halle la siguiente integral

$$\int \frac{-2x}{(x+1)(x^{2}+1)}dx$$

Solucion: Utilizando el metodo de fracciones simples

$$\frac{-2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

es decir,

$$-2x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C)$$

asi,

$$A = 1 \qquad B = C = -1.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x}{(x+1)(x^2+1)}dx &= \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{x+1}{x^2+1}dx \\ &= \ln|x+1| - \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{dx}{x^2+1}\end{aligned}$$

realizando en la primera integral, el cambio de variable $u = x^2+1$, $du = 2xdx$; tenemos que

$$\int \frac{-2x}{(x+1)(x^2+1)}dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan(x) + C.$$

3. (10 ptos.)

   a) (5 ptos) Halle la integral indefinida

   $$\int \frac{x^2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx$$

   b) (5 ptos) Luego, estudie la convergencia o divergencia de $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx$.

Solucion: Utilizando la sustitucion trigonometrica $x = \sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta)$, $dx = \sqrt{2}\cos(\theta)d\theta$; se tiene que

$$\begin{aligned}\int \tfrac{x^2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx &= \int \tfrac{2\operatorname{sen}^2(\theta)\sqrt{2}\cos(\theta)d\theta}{(2-2\operatorname{sen}^2(\theta))^{3/2}} \\ &= \tfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\int \tfrac{\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\theta)d\theta}{\cos^3(\theta)} \\ &= \int \tfrac{\operatorname{sen}^2(\theta)d\theta}{\cos^2(\theta)} = \int \tan^2(\theta)d\theta \\ &= \int(\sec^2(\theta)-1)d\theta = \tan(\theta) - \theta + K \\ &= \tfrac{x}{\sqrt{2-x^2}} - \operatorname{arc\,sen}(\tfrac{x}{\sqrt{2}}) + K.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx = \lim_{b\to(\sqrt{2})^-}\int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx &= \lim_{b\to(\sqrt{2})^-}\left(\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} - \operatorname{arc\,sen}(\frac{x}{\sqrt{2}})\right) \\ &= \infty + \frac{\pi}{2} = \infty.\end{aligned}$$

4. (10 ptos)

   a) (5 ptos) Demuestre que

$$\int_1^{+\infty} e^{t^2} dt = +\infty$$

Solucion: Tenemos que $t \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq t$, de aqui que, $e^t \leq e^{t^2}$ (pues, la funcion exponencial es una funcion creciente), entonces

$$\int_1^{+\infty} e^t dt = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b e^t dt = \lim_{b\to+\infty} e^t|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (e^b - e) = +\infty.$$

Luego, por el criterio de comparación

$$\int_1^{+\infty} e^{t^2} dt = +\infty.$$

   b) (5 ptos) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^{x^3} e^{t^2} dt}{x^4}.$$

Solucion: Tenemos una indeterminacion de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, utilizando L'H y el teorema fundamental del calculo (por ser e^{t^2} una función continua en $\mathbb{R}$, en particular en cualquier intervalo cerrado); se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^{x^3} e^{t^2} dt}{x^4} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^6} 3x^2}{4x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^{x^6}}{4x} \\ &\text{(aplicamos L'H)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{18x^5 e^{x^6}}{4} = +\infty. \end{aligned}$$